RUPRECHT-KARLS-
UNIVERSITÄT
HEIDELBERG

Bachelorarbeit

Asymptotisches Verhalten von Ordnungsstatistiken

Eldar Keller

21.10.2014

Betreuung: Dr. Axel Bücher

Fakultät für Mathematik

Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

1.1 Notation 5

1.2 Motivation und Grundlagen 6

2 Extreme Ordnungsstatistiken **12**

3 Zwischenordnungsstatistiken **21**

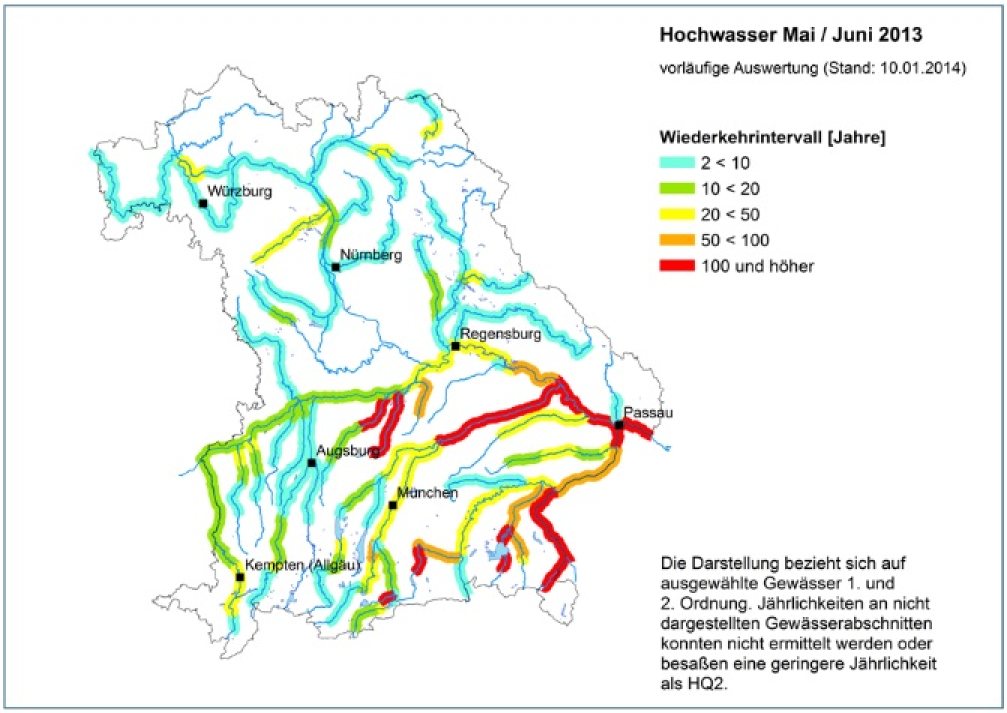
4 Konsistenz des Pickands-Schätzers **29**

5 Erklärung **34**

1 Einleitung

In der Statistik sind verschiedene Werte, wie beispielsweise die Verteilungsart, der Erwartungswert und der Median eines gegebenen Datensatzes von großem Interesse. Bei der Schätzung dieser Werte, vor allem bei relativ kleiner Stichprobengröße, kann es sinnvoll sein, extreme Ausreißer von der Norm aus der Stichprobe zu entfernen, um genauere Ergebnisse zu erzielen.
Angenommen, man untersucht beispielsweise den Wasserpegel der Donau an verschiedenen Orten in den letzten vier Jahren (2010-2013) und ist an Schätzwerten für den Pegel im Jahr 2014 interessiert. Dann wäre es sinnvoll, die Daten zur Zeit des Hochwassers im Mai/Juni 2013 außer Betracht zu lassen (Datenbereinigung), da diese weit über den Normalwerten liegen und somit die Qualität der Schätzung verschlechtern würden.

Eine andere Herangehensweise ist jedoch gefragt, wenn man sich für eben diese extremen Abweichungen und selten eintretenden Ereignisse interessiert. Betrachtet man wieder die Daten für den Wasserpegel der Donau, so kann man unter anderem die Wahrscheinlichkeit von Hochwasser untersuchen. Es ließe sich beispielsweise eine Schätzung der Jährlichkeit des höchsten Wasserstands zur Zeit des Hochwassers im Jahr 2013 anstellen - die Jährlichkeit beschreibt hierbei, wie viel Zeit bei einem wiederkehrenden Ereignis zwischen den einzelnen Ereignissen liegt. Das heißt bei einer Jährlichkeit von 10 Jahren tritt besagtes Ereignis statistisch gesehen wahrscheinlich ein mal in zehn Jahren ein. Schätzungen zu den erreichten Pegelständen im Frühsommer 2013, zum Beispiel unter anderem in Passau, haben eine Jährlichkeit von weit über 100 Jahren ergeben.



Quelle: [LfU], S. 15

Als Zweig der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik beschäftigt sich die Extremwerttheorie mit eben solchen, selten eintretenden Ereignissen. Insbesondere sind hierbei also die maximalen oder minimalen Daten von spezieller Bedeutung. Eines der zentralen Ergebnisse der Extremwerttheorie besagt, dass affine Transformationen solcher Maxima, beziehungsweise Minima, mit zunehmendem Stichprobenumfang nur gegen drei verschiedene Typen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen konvergieren können, wenn man diese als Zufallsvariablen untersucht.
Im allgemeinen findet die Extremwerttheorie somit in vielen Bereichen Anwendung, bei denen extreme Ereignisse eine große Rolle spielen. Hierzu zählen unter anderem:

- Finanzwesen (Wahrscheinlichkeit von Börsencrashs)
- Versicherungswesen (Wahrscheinlichkeit großer Unfälle, also Zahlungen)
- Klimaforschung (Wahrscheinlichkeit von Umweltkatastrophen, Klimawandel)
- Baugewerbe (Höhe eines Damms, um wirtschaftlich UND sicher zu sein)

In der folgenden Arbeit wird auf die Theorie hinter diesen Anwendungsgebieten eingegangen, wobei der Fokus auf der extremwerttheoretischen Untersuchung von Ordnungsstatistiken liegt. Des Weiteren wird eine Anwendung betrachtet, welche auf diese Untersuchung basiert - der Pickands-Schätzer. Hierbei stützen sich viele Aussagen auf Resultate aus dem Buch [deHaFe], auf welches für eine tiefere Untersuchung des Themenkomplexes verwiesen sei.

1.1 Notation

iid	unabhängig und identisch verteilt
$\sim$	Zufallsvariable ist verteilt wie
$\stackrel{d}{=}$	Gleichheit in Verteilung
$\stackrel{d}{\to}$	Konvergenz in Verteilung
$X_{k:n}$	k-te Ordnungsstatistik von n Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$; insbesondere ist
$X_{1:n}$	Kleinste der n Zufallsvariablen
$X_{n:n}$	Größte der n Zufallsvariablen
$X_{n-k+1:n}$	k-größte Ordnungsstatistik der n Zufallsvariablen
$\overline{F}$	Tailfunktion $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ einer Verteilungsfunktion F
$F^{\leftarrow}$	linksstetige Inverse von F: $F^{\leftarrow}(x) := \inf\{x \mid F(x) \geq x\}$ heißt Quantilfunktion, falls F eine Verteilungsfunktion bezeichnet,
U	linksstetige Inverse von $\frac{1}{1-F}$
x^*	rechter Endpunkt für eine Verteilungsfunktion F; das heißt $x^* := \sup\{x \mid F(x) < 1\} = U(\infty)$
$MAB(G_\gamma)$	maximaler Anziehungsbereich einer Extremwertverteilung G_γ
$f \in RV_\alpha$	f regulär variierend in ∞ mit Index α, das heißt $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{f(\lambda t)}{f(t)} = \lambda^\alpha$, für alle $\lambda > 0$

1.2 Motivation und Grundlagen

Eines der zentralen Themen dieser Arbeit stellen Ordnungsstatistiken dar.

Definition 1.1. *Es seien $X_1, \dots, X_n$ iid Zufallsvariablen gegeben. Ordnen wir diese Zufallsvariablen der Größe nach, so erhalten wir die Ordnungsstatistiken*

$$X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}.$$

Bemerkung: Insbesondere gilt also:

- $X_{1:n} = \min(X_1, \dots, X_n)$ ist die kleinste Zufallsvariable,
- $X_{n:n} = \max(X_1, \dots, X_n)$ ist die größte Zufallsvariable,
- $X_{n-k+1:n}$ ist die k-größte der n Zufallsvariablen für $1 \leq k \leq n$.

Nun wollen wir zunächst die Wahrscheinlichkeitsdichte und Verteilung der k-ten Ordnungsstatistik bestimmen:

Satz 1.2. *Es seien $X_1, \dots, X_n$ iid Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F und Dichtefunktion f, wenn gegeben. Dann gilt:*

$$\mathbb{P}(X_{k:n} \leq x) = \sum_{m=k}^{n} \binom{n}{m} F(x)^m (1 - F(x))^{n-m}, \tag{1.1}$$

$$\text{sowie } f_{X_{k:n}}(x) = \binom{n}{k} k f(x) F(x)^{k-1} (1 - F(x))^{n-k}, \tag{1.2}$$

wobei $f_{X_{k:n}}$ die Dichtefunktion der k-ten Ordnungsstatistik ist.

Beweis. Wir definieren zunächst $Y_n := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}}$.
$\mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}}$ nimmt mit Wahrscheinlichkeit $F(x)$ den Wert eins an und null sonst. Somit sind die Indikatoren insbesondere Bernoulli-verteilt mit Parameter $F(x)$. Die Summe von n identisch Bernoulli-verteilten Parametern entspricht der Binomial-Verteilung. Wir erhalten: $Y_n \sim Bin(n, F(x))$. Schließlich gilt

$$\mathbb{P}(X_{k:n} \leq x) = \mathbb{P}(Y_n \geq k) = \sum_{m=k}^{n} \mathbb{P}(Y_n = m) = \sum_{m=k}^{n} \binom{n}{m} F(x)^m (1 - F(x))^{n-m},$$

womit die erste Aussage (1.1) bewiesen ist.
Durch Ableitung dieses Resultats erhalten wir

$$\begin{aligned} f_{X_{k:n}}(x) &= \frac{d}{dx} \mathbb{P}(X_{k:n} \leq x) \\ &= \sum_{m=k}^{n} \binom{n}{m} \Big(m F(x)^{m-1} f(x) (1 - F(x))^{n-m} - (n-m) F(x)^m (1 - F(x))^{n-m-1} f(x) \Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \binom{n}{k} kF(x)^{k-1} f(x)(1-F(x))^{n-k} + \sum_{m=k+1}^{n} \binom{n}{m} mF(x)^{m-1} f(x)(1-F(x))^{n-m} \\
&\quad - \sum_{m=k}^{n-1} \binom{n}{m} (n-m) F(x)^m (1-F(x))^{n-m-1} f(x) \\
&= \binom{n}{k} kF(x)^{k-1} f(x)(1-F(x))^{n-k} + 0,
\end{aligned}
$$

woraus direkt die zweite Aussage (1.2) folgt. □

Das folgende Resultat beschreibt die gemeinsame Dichte des Vektors $(X_{1:n}, \ldots, X_{n:n})$ von Ordnungsstatistiken.

Satz 1.3. *Es seien $X_1, \ldots, X_n$ iid Zufallsvariablen mit Dichte f bezüglich eines dominierenden Maßes μ. Dann ist die gemeinsame Dichte der Ordnungsstatistiken gegeben durch:*

$$
f_{X_{1:n},\ldots,X_{n:n}}(t_1, \ldots, t_n) = \begin{cases} n! \cdot f(t_1) \cdots f(t_n), & \text{für } t_1 \leq \ \ldots \ \leq t_n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}
$$

Beweis. (Heuristisch)
Für den Fall, dass $t_1 \leq \cdots \leq t_n$ nicht gilt, ist die gemeinsame Dichte offensichtlich 0, da die Ordnungsstatistiken der Größe nach geordnet sind. Gilt nun $(X_{i_1} = t_1, \ldots, X_{i_n} = t_n)$, für $\{i_1, \ldots, i_n\} = \{1, \ldots, n\}$, so gibt es $n!$ Permutationsmöglichkeiten, die zur gemeinsamen Dichte $f_{X_{i_1},\ldots,X_{i_n}}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1) \cdots f(t_n)$ angenommen werden können. □

Nun zeigen wir einen Satz, der als Hilfssatz für mehrere Beweise benötigt wird:

Satz 1.4. *Es seien $X_1, \ldots, X_n$, sowie $Y_1, \ldots, Y_n$ iid Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Dann gilt für die gemeinsamen Verteilungen ihrer Ordnungsstatistiken:*

$$
(X_{1:n}, \ldots, X_{n:n}) \overset{d}{=} (Y_{1:n}, \ldots, Y_{n:n})
$$

Beweis. Es gilt wegen der Unabhängigkeit der Variablen für beliebige Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in A_i) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y_i \in A_i) \\
&= \mathbb{P}(Y_1 \in A_1, \ldots, Y_n \in A_n),
\end{aligned}
$$

das heißt $(X_1, \ldots, X_n) \overset{d}{=} (Y_1, \ldots, Y_n)$. Nun lässt sich die stetige Transformation

$$
h(x_1, \ldots, x_n) = (x_{1:n}, \ldots, x_{n:n}), \text{ mit } x_{1:n} \leq \ \ldots \ \leq x_{n:n}
$$

anwenden. Somit erhalten wir mit der Stetigkeit von h:

$$
h(X_1, \ldots, X_n) \overset{d}{=} h(Y_1, \ldots, Y_n),
$$

was das Gewünschte zeigt. □

Satz 1.2 und 1.3 legen nahe, dass das stochastische Verhalten aller Ordnungsstatistiken bereits geklärt ist. Die angegebenen Formeln sind in der Praxis jedoch nicht gut handhabbar. Daher betrachten wir in den nachfolgenden Kapiteln eine vereinheitlichende Theorie, die das asymptotische Verhalten der Ordnungsstatistiken beschreibt.
Dazu seien $X_1, \ldots, X_n$ *iid* verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F und $a_n > 0, b_n$ reelle Folgen. Unser Hauptziel ist zunächst das Finden einer Verteilung G, für die gilt:

$$\frac{X_{n:n} - b_n}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} G.$$

Diese Verteilungen G nennen wir *Extremwertverteilungen* und man sagt: F liegt im *maximalen Anziehungsbereich* (MAB) der Extremwertverteilung G.

Bemerkung 1.5. *Ohne Beschränkung der Allgemeinheit werden wir im Folgenden immer die Maxima $X_{n:n}$ untersuchen, da durch die Umformung $X_{1:n} = \min(X_1, \ldots, X_n) = -\max(-X_1, \ldots, -X_n)$ leicht analoge Resultate für Minima erzielt werden können.*

Wir kommen nun zu einigen zentralen Sätzen der Extremwerttheorie. Für Beweise dieser Sätze sei auf einschlägige Literatur verwiesen (z.B.: [deHaFe], Kapitel 1).

Satz 1.6 (Fisher-Tippet (1928), Gnedenko (1943))**.** *Die Menge der Extremwertverteilungen ist durch*

$$\{G_\gamma(ax + b) | a > 0,\ b \in \mathbb{R}\}$$

gegeben, wobei gilt:

$$G_\gamma(x) = \exp\left(-(1 + \gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}\right),\ \textit{mit } 1 + \gamma x > 0,\ \gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Für $\gamma = 0$ gilt:

$$G_\gamma(x) = exp\left(-e^{-x}\right)$$

und der Parameter γ wird Extremwertindex genannt.

In Satz 1.6 werden die Extremwertverteilungen als drei-parametrige Familie klassifiziert. Diese werden häufig aber auch anders parametrisiert, indem sie in drei Verteilungsklassen aufgeteilt werden.

Definition 1.7. *Die Menge der Extremwertverteilungen ist aufgeteilt in 3 Klassen:*

1. *Für $\gamma < 0$ erhalten wir mit $\alpha = -\frac{1}{\gamma}$:*

$$\Psi_\alpha(x) := G_\gamma\left(\frac{1 + x}{-\gamma}\right) = \begin{cases} \exp\left(-(-x)^\alpha\right), & \textit{für } x < 0, \\ 1, & \textit{für } x \geq 0. \end{cases}$$

   Die Verteilungen dieser Klasse werden Weibull-Verteilungen genannt.

2. *Für $\gamma = 0$ gilt:*

$$G_0(x) = \exp\left(-e^{-x}\right),\ \textit{für } x \in \mathbb{R}.$$

   G_0 wird Gumbel-Verteilung genannt.

3. *Für $\gamma > 0$ und $\alpha = \frac{1}{\gamma}$ gilt:*

$$\Phi_\alpha(x) := G_\gamma\left(\frac{x-1}{\gamma}\right) = \begin{cases} 0, & \textit{für } x \leq 0, \\ \exp\left(-x^{-\alpha}\right), & \textit{für } x > 0. \end{cases}$$

die Verteilungen dieser Klasse werden Fréchet-Verteilungen genannt.

Den folgenden Satz werden wir in späteren Beweisen mehrfach verwenden, da er äquivalente Aussagen dazu liefert, dass eine Verteilungsfunktion im MAB einer Extremwertverteilung liegt.

Satz 1.8. *Eine Verteilungsfunktion F mit rechtem Endpunkt $x^* = \sup\{x|F(x) < 1\}$ liegt im MAB der Extremwertverteilung G_γ, genau dann wenn für eine positive Funktion f gilt:*

$$\lim_{t \nearrow x^*} \frac{1 - F(t + xf(t))}{1 - F(t)} = (1 + \gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}} \text{ , für } 1 + \gamma x > 0.$$

Letztere Aussage ist für eine positive Funktion a und $U = \left(\frac{1}{1-F}\right)^{\leftarrow}$ wiederum äquivalent zu

$$\lim_{t \to \infty} \frac{U(tx) - U(t)}{a(t)} = \begin{cases} \log x, & \textit{für } \gamma = 0, \\ \frac{x^\gamma - 1}{\gamma}, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

In diesem Fall gilt

$$\frac{X_{n:n} - b_n}{a_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} G_\gamma \quad ,$$

mit $b_n = U(n)$, $a_n = a(n)$ und f kann als $f(t) = a\left(\frac{1}{1-F(t)}\right)$ gewählt werden.

Um zu zeigen, dass eine Verteilungsfunktion F im MAB einer Extremwertverteilung G_γ liegt, lässt sich in vielen Fällen mit hinreichender Differenzierbarkeit der Satz von Mises anwenden.

Satz 1.9 (von Mises)**.** *Für eine Verteilungsfunktion F existiere die zweite Ableitung F'' und es gelte $F'(x) > 0$ für alle $x \in (x_0, x^*)$, mit einem $x_0 < x^*$. Ist dann die von Mises Bedingung*

$$\lim_{t \nearrow x^*} \left(\frac{1-F}{F'}\right)'(t) = \gamma \tag{1.3}$$

oder äquivalent dazu

$$\lim_{t \nearrow x^*} \frac{(1 - F(t))F''(t)}{(F'(t))^2} = -\gamma - 1$$

erfüllt, so liegt F im MAB von G_γ.

Hieraus lässt sich eine weitere Aussage ableiten:

Korollar 1.10. *Die von Mises Bedingung (1.3) ist äquivalent zu*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{tU''(t)}{U'(t)} = \gamma - 1,$$

was

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U'(tx)}{U'(t)} = x^{\gamma-1}, \text{ für } x > 0 \tag{1.4}$$

impliziert.

Bemerkung 1.11. *In den folgenden Beweisen wird häufig die Funktion U verwendet, da sie viele Schritte leichter gestaltet. Man beachte, dass U monoton steigend ist, für Werte größer eins definiert werden kann und die Grenzwertrelation $\lim\limits_{n\to\infty} U(n) = x^*$ erfüllt.*

Die kommenden Sätze werden uns bei mehreren Beweisen helfen, wobei vor allem die δ-Methode häufig Anwendung findet.

Satz 1.12 (δ-Methode)**.** *Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein stochastischer Prozess, θ, σ^2 endliche Konstanten und*

$$\sqrt{n}\big(X_n - \theta\big) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2).$$

Dann gilt für eine beliebige Funktion g, deren Ableitung $g'(\theta)$ existiert und ungleich null ist:

$$\sqrt{n}\big(g(X_n) - g(\theta)\big) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2(g'(\theta))^2).$$

Für einen Beweis sei beispielsweise auf [vdVa], Kapitel 3 verwiesen.
Die Potter-Ungleichungen liefern uns ein nicht-asymptotisches Resultat für regulär variierende Funktionen. (vgl. [Pot])

Satz 1.13 (Potter-Ungleichungen)**.** *Für ein $f \in RV_\alpha$ und beliebige $\delta_1, \delta_2 > 0$ gilt: Es existiert ein $t_0 = t_0(\delta_1, \delta_2)$, sodass für $t \geq t_0,\ tx \geq t_0$ gilt:*

$$(1-\delta_1)x^\alpha \min(x^{\delta_2}, x^{-\delta_2}) < \frac{f(tx)}{f(x)} < (1+\delta_1)x^\alpha \max(x^{\delta_2}, x^{-\delta_2}).$$

Mit diesen Sätzen haben wir nun eine ausreichende Grundlage, um verschiedene Resultate bezüglich den asymptotischen Verteilungen von Ordnungsstatistiken zu erhalten. Hierbei kann man verschiedene Fälle betrachten:

- $X_{n-k+1:n}$ für festes $k \in \mathbb{N}$ und $n \to \infty$
- $X_{n-k:n}$ für $k = k(n) \to \infty$, $n \to \infty$ und $\frac{k}{n} \to 0$
- $X_{n-k:n}$ für $k = k(n) \to \infty$, $n \to \infty$ und $\frac{k}{n} \to p \in (0,1)$

Der erste Fall behandelt die extremen Ordnungsstatistiken, deren Betrachtung im Sinne der Extremwerttheorie intuitiv sinnvoll erscheint. Wir werden uns als Erstes mit diesem Fall beschäftigen und uns dabei auf das Finden einer Wahrscheinlichkeitsverteilung konzentrieren, gegen die die Verteilung der extremen Ordnungsstatistiken konvergiert und diese explizit nennen. Des Weiteren werden wir eine alternative Darstellung der Ordnungsstatistiken und dabei eine Verbindung zu exponentialverteilten Zufallsvariablen zeigen.

Im darauf folgenden Kapitel untersuchen wir den zweiten Fall, welcher die Zwischenordnungsstatistiken darstellt. Diese spielen vor allem bei der Schätzung des Extremwertindexes γ eine große Rolle. Wie im Kapitel davor konzentrieren wir uns dabei auf die Wahrscheinlichkeitsverteilung, gegen die die Zwischenordnungsstatistiken konvergieren. Es wird sich herausstellen, dass diese normalverteilt ist.
Im letzten Kapitel werden wir eine der Anwendungen der Zwischenordnungsstatistiken behandeln: Den Pickands-Schätzer, der einen Schätzer für beliebige Extremwertindizes γ darstellt.

Der dritte Fall entspricht den zentralen Ordnungsstatistiken, für die ähnliche Resultate wie für die Zwischenordnungsstatistiken gezogen werden können. Diese werden wir in dieser Arbeit jedoch nicht untersuchen. Für eine tiefere Untersuchung von Zwischenordnungsstatistiken sei beispielsweise auf [ArBaNa], Kapitel 8.5 verwiesen.

2 Extreme Ordnungsstatistiken

Im folgenden Kapitel seien $X_1, \ldots, X_n$ *iid* Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Wir betrachten zunächst extreme Ordnungsstatistiken, welche das asymptotische Verhalten der k-größten Ordnungsstatistik $X_{n-k+1:n}$ unter $n \longrightarrow \infty$ behandeln, während $k \in \mathbb{N}$ fest bleibt.
Hierzu suchen wir eine Verteilungsfunktion, gegen die die normalisierte k-größte Ordnungsstatistik in Verteilung konvergiert:

$$\frac{X_{n-k+1:n} - b_n}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} ? \tag{2.1}$$

Dafür formulieren wir zunächst ein Lemma, welches die Anzahl der Überschreitungen eines, mit n wachsenden, Schwellenwertes c_n der Beobachtungen $X_1, \ldots, X_n$ untersucht.

Lemma 2.1. *Es sei c_n eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} n\overline{F}(c_n) = \tau$ und $0 < \tau \leq \infty$. Wir definieren $S_n := \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i > c_n\}}$. Dann gilt:*

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} Po(\tau),$$

das heißt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i > c_n\}} = k \right) = \frac{\tau^k}{k!}\ e^{-\tau}\ , k \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis. S_n beschreibt die Anzahl der Überschreitungen des Wertes c_n. Es gilt $\mathbb{P}(X_i > c_n) = 1 - \mathbb{P}(X_i \leq c_n)$, also ist $\mathbb{1}_{\{X_i > c_n\}}$ Bernoulli-verteilt mit Parameter $1 - F(c_n) = \overline{F}(c_n)$. Insbesondere erhalten wir $S_n \sim Bin(n, \overline{F}(c_n))$. Wegen der Vorraussetzung $\lim\limits_{n\to\infty} n\overline{F}(c_n) = \tau$ ist der Poissonsche Grenzwertsatz anwendbar, der das Gewünschte für $\tau \in (0, \infty)$ liefert:

$$S_n \sim Bin(n, \overline{F}(c_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{d} Po(\tau).$$

Für den Fall, dass $\tau = \infty$ gilt, betrachten wir die Wahrscheinlichkeitsfunktion von S_n:

$$\begin{aligned}
Bin(k|n, \overline{F}(c_n)) &= \binom{n}{k} \overline{F}(c_n)^k (1 - \overline{F}(c_n))^{n-k} \\
&= \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \frac{(n\overline{F}(c_n))^k}{k!} (1 - \overline{F}(c_n))^{n-k} \\
&= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{(n\overline{F}(c_n))^k}{k!} \left(1 - \frac{n\overline{F}(c_n)}{n}\right)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Der letzte Faktor $\left(1 - \frac{n\overline{F}(c_n)}{n}\right)^{n-k} \sim e^{-n\overline{F}(c_n)}$ geht wegen $\lim\limits_{n\to\infty} n\overline{F}(c_n) = \infty$ exponentiell gegen null. Wir erhalten schließlich $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n = k) = 0$, was mit der Poisson-Verteilung für $\tau = \infty$ übereinstimmt. $\square$

Der folgende Satz beantwortet die Frage in (2.1), wobei Lemma 2.1 einen der zentralen Beweisschritte darstellt.

Satz 2.2. *Es seien $a_n > 0$, b_n reelle Folgen und G eine Extremwertverteilung mit*

$$\frac{X_{n:n} - b_n}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} G. \tag{2.2}$$

Dann ist die normalisierte asymptotische Verteilung der k-größten Ordnungsstatistik $X_{n-k+1:n}$ für $k \in \mathbb{N}$, $n \to \infty$ gegeben durch:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_{n-k+1:n} - b_n}{a_n} \le x \right) = \begin{cases} G(x) \cdot \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(-\log G(x))^s}{s!}, & G(x) \neq 0 \\ 0, & G(x) = 0 \end{cases} , x \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Wir definieren analog zu Lemma 2.1 $S_n := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i > c_n\}}$ und $c_n := a_n x + b_n$. Offensichtlich ist $\frac{X_{n-k+1:n} - b_n}{a_n} \le x$ äquivalent zu $X_{n-k+1:n} \le a_n x + b_n$ und damit auch zu $S_n \le k-1$. Falls $n\overline{F}(c_n)$ gegen $\tau \in (0, \infty]$ konvergiert, so liefert eine Anwendung von Lemma 2.1:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{X_{n-k+1:n} - b_n}{a_n} \le x \right) &= \mathbb{P}(S_n \le k-1) = \sum_{s=0}^{k-1} \mathbb{P}(S_n = s) \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{2.1} \sum_{s=0}^{k-1} \frac{\tau^s}{s!} e^{-\tau} \text{ , für } \tau = \lim_{n\to\infty} n\overline{F}(c_n). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Es bleibt daher zu zeigen, dass $n\overline{F}(c_n) \to \tau = -\log G(x)$, was das gewünschte Ergebnis liefert. Wir unterscheiden dazu zwei Fälle und betrachten zunächst den Fall, dass $G(x) \neq 0$.
Da die Verteilungsfunktion von $X_{n:n}$ durch F^n gegeben ist (vergleiche Satz 1.2), folgt mit der Voraussetzung (2.2), dass $F^n(a_n x + b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} G(x)$.
Logarithmieren mit $G(x) \neq 0$ liefert dann

$$n \log F(c_n) = n \log(1 - \overline{F}(c_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \log G(x),$$

weswegen insbesondere gilt:

$$\log F(c_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \text{ also } \overline{F}(c_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{2.4}$$

Nun lässt sich die Taylorformel mit Lagrange-Restglied für einen Entwicklungspunkt a anwenden. Falls f $(n+1)-$mal differenzierbar ist, so gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \text{ , wobei } \xi \text{ zwischen } x \text{ und } a \text{ liegt.}$$

Mit $f(x) = \log(1-x)$, $a = n = 0$ und $x \in (0,1)$ gilt $f^{(1)}(x) = -\frac{1}{1-x}$, so dass

$$f(x) = 0 - x \cdot \frac{1}{1-\xi}\ , \text{ für ein } \xi \in (0,1).$$

Setzt man nun $x = \overline{F}(c_n) \in (0,1)$, so gilt:

$$n \log(1 - \overline{F}(c_n)) = -n\overline{F}(c_n) \cdot \frac{1}{1-\xi_n}\ , \text{ mit } \xi_n \in (0, \overline{F}(c_n)).$$

Aus (2.4) folgt $\xi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, also insbesondere:

$$-\tau = \lim_{n\to\infty} - n\overline{F}(c_n) = \lim_{n\to\infty} n \log(1 - \overline{F}(c_n)) = \log G(x).$$

Einsetzen von τ in (2.3) liefert das Gewünschte für $G(x) \neq 0$.
Zum Beweis für $G(x) = 0$ wollen wir zeigen, dass in diesem Fall $\tau = \infty$ gilt. Wir erhalten mit der Logarithmus-Darstellung:

$$\lim_{n\to\infty} n \log F(c_n) = -\infty,$$

woraus folgt:

$$\lim_{n\to\infty} n \log(1 - \overline{F}(c_n)) = -\infty.$$

Mit der Taylordarstellung erhalten wir:

$$\lim_{n\to\infty} -n\overline{F}(c_n) \cdot \frac{1}{1-\xi_n} = -\infty.$$

Für den Fall, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{F}(c_n) = 0$ gilt, muss somit gelten:

$$\lim_{n\to\infty} -n\overline{F}(c_n) = -\infty,$$

da für $\overline{F}(c_n) \to 0$ auch $\xi_n \to 0$. Für die verbleibenden Fälle gilt $\lim\limits_{n\to\infty} -n\overline{F}(c_n) = -\infty$ offensichtlich auch. Wir erhalten $\tau = \infty$, weswegen mit Lemma 2.1 folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n = s) = 0$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_{n-k+1:n} - b_n}{a_n} \leq x\right) = 0, \quad \text{für } G(x) = 0.$$

$\square$

Mit Satz 2.2 haben wir die asymptotische Verteilungsfunktion der k-größten Zufallsvariable gefunden. Mit einer alternativen Beweismethode können wir sogar die gemeinsame

Asymptotische Verteilung der größten k Ordnungsstatistiken herleiten, das heißt wir untersuchen

$$\left(\frac{X_{n:n}-b_n}{a_n}, \frac{X_{n-1:n}-b_n}{a_n}, \dots, \frac{X_{n-k:n}-b_n}{a_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \ ?$$

Hierzu beweisen wir zunächst ein solches Resultat für exponentialverteilte Zufallsvariablen und benutzen dieses dann, um ein allgemeineres Ergebnis herzuleiten.

Lemma 2.3. *Es seien $E_1, \dots, E_n$ iid, sowie $E_1^*, \dots, E_n^*$ iid standard-exponentialverteilte Zufallsvariablen ($\sim exp(1)$). Dann gilt:*

$$(E_{1:n}, \dots, E_{n:n}) \stackrel{d}{=} \left(\frac{E_1^*}{n}, \frac{E_1^*}{n} + \frac{E_2^*}{n-1}, \dots, \frac{E_1^*}{n} + \frac{E_2^*}{n-1} + \ \dots \ + \frac{E_n^*}{1}\right)$$

Bemerkung 2.4. *Wir erhalten hieraus für festes $1 \leq k \leq n$ insbesondere:*

$$n(E_{1:n}, \dots, E_{k:n}) \xrightarrow[n\to\infty]{d} (E_1^*, \dots, E_1^* + \ \dots \ + E_k^*)$$

Beweis. Aus Satz 1.3 bekommen wir zunächst die gemeinsame Dichte von $(E_1, \dots, E_n)$:

$$f_{E_{1:n},\dots,E_{1:n}}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} n! \cdot e^{-x_1} \cdots e^{-x_n}, & \text{für } 0 < x_1 \leq \ \dots \ \leq x_n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Unabhängigkeit von $(E_1^*, \dots, E_n^*)$ liefert auch deren gemeinsame Dichte

$$f_{E_1^*,\dots,E_n^*}(y_1, \dots, y_n) = \begin{cases} e^{-y_1} \cdots e^{-y_n}, & \text{für } y_1, \dots, y_n > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

auf die wir die lineare Transformation

$$T(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{y_1}{n}, \frac{y_1}{n} + \frac{y_2}{n-1}, \dots, \frac{y_1}{n} + \frac{y_2}{n-1} + \ \dots \ + \frac{y_n}{1}\right)^T =: (z_1, \dots, z_n)^T$$

anwenden wollen, die offensichtlich streng monoton steigend und differenzierbar ist. Die Umkehrfunktion $T^{-1}(y_1, \dots, y_n)$ ist durch

$$\left(ny_1, (n-1)\Big(y_2 - \frac{y_1}{n}\Big), (n-2)\Big(y_3 - \frac{y_2}{n-1} - \frac{y_1}{n}\Big), \dots, y_n - \frac{y_{n-1}}{2} - \ \dots \ - \frac{y_1}{n}\right)$$

gegeben. Somit erhalten wir die Jacobi-Matrix

$$\frac{d}{dy} T^{-1}(y) = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{n-1}{n} & n-1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{n-2}{n} & -\frac{n-2}{n-1} & n-2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

deren Determinante offensichtlich $n!$ ist.
Die Transformationsformel besagt, dass für eine stetige Zufallsvariable X die Dichte von $Y = g(X)$, mit einer streng monoton wachsenden und differenzierbaren Funktion g, gegeben ist durch:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X\big(g^{-1}(y)\big) \cdot |\frac{d}{dy} g^{-1}(y)|, & f_X(x) > 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Dichte von $T(E_1^*, \ldots, E_n^*)$ ist daher:

$$n! \cdot f_{E_1^*,\ldots,E_n^*}(y_1, \ldots, y_n) = \begin{cases} n! e^{-y_1} \cdots e^{-y_n}, & \text{für } 0 < y_1 \leq \ \ldots \ \leq y_n \ , \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

was das gewünschte Ergebnis liefert. □

Wir beweisen zusätzlich ein Lemma, das für den Beweis von Satz 2.6 benötigt wird.

Lemma 2.5. *Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller und monoton steigender Funktionen, die punktweise gegen eine stetige Funktion f konvergieren.*
Dann gilt: f_n konvergiert lokal gleichmäßig gegen f, das heißt für beliebige $x > 0$ existieren $\delta > 0$, sodass gilt:

$$\sup_{y\in(x-\delta,x+\delta)} |f_n(y) - f(y)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Beweis. Es seien x fest und $\epsilon > 0$ gegeben. Wegen der Stetigkeit von f können wir ein $\delta > 0$ wählen, sodass gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2} \ , \text{ für alle } y \in [x - \delta, x + \delta].$$

Außerdem gilt wegen der punktweisen Konvergenz von f_n gegen f:
Es existiert ein $N = N(x)$, sodass für alle $n \geq N$ gilt: $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$.
Wir definieren $N_1 := N(x + \delta),\ N_2 := N(x - \delta)$. Damit gilt für alle $y \in (x - \delta, x + \delta)$:

$$\begin{aligned} f_n(y) - f(y) &\leq f_n(x + \delta) - f(y) \\ &= f_n(x + \delta) - f(x + \delta) + f(x + \delta) - f(y) \\ &\leq \epsilon, \text{ für alle } n \geq N_1, \end{aligned}$$

sowie analog dazu

$$\begin{aligned} f_n(y) - f(y) &\geq f_n(x - \delta) - f(y) \\ &\geq -\epsilon, \text{ für alle } n \geq N_2. \end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir damit:

$$|f_n(y) - f(y)| \leq \epsilon, \text{ für alle } n \geq \max(N_1, N_2),$$

was das Gewünschte zeigt. □

Mit diesen Lemmata können wir nun den folgenden Satz beweisen.

Satz 2.6. *Angenommen F liegt im MAB einer Extremwertverteilung G_γ für $\gamma \in \mathbb{R}$, das heißt es existieren reelle Folgen a_n, b_n mit*

$$\frac{X_{n:n} - b_n}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} G_\gamma.$$

Dann gilt für jedes festes $k \in \mathbb{N}$:

$$\left(\frac{X_{n:n} - b_n}{a_n}, \frac{X_{n-1:n} - b_n}{a_n}, \dots, \frac{X_{n-k:n} - b_n}{a_n}\right)$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{d} \left(\frac{(E_1^*)^{-\gamma} - 1}{\gamma}, \frac{(E_1^* + E_2^*)^{-\gamma} - 1}{\gamma}, \dots, \frac{(E_1^* + E_2^* + \dots + E_{k+1}^*)^{-\gamma} - 1}{\gamma}\right),$$

wobei $E_1^*, \dots, E_{k+1}^*$ iid standard-exponentialverteilte Zufallsvariablen sind.

Beweis. Es seien im Folgenden wieder $E_1, \dots, E_n$ *iid* standard-exponentialverteilte Zufallsvariablen. Für ein $E \sim exp(1)$ ist die Tail-Funktion durch e^{-x} gegeben. Sei nun x so gewählt, dass $F(x) \neq 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(U\left(\frac{1}{1 - e^{-E}}\right) \leq x\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{1 - e^{-E}} \leq \frac{1}{1 - F(x)}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(1 - F(x) \leq 1 - e^{-E}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(e^{-E} \leq F(x)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-E \leq \log F(x)\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}(E \leq -\log F(x)) \\
&= e^{-(-\log F(x))} = F(x).
\end{aligned}$$

Falls andererseits $F(x) = 0$, so ist offensichtlich

$$\mathbb{P}\left(U\left(\frac{1}{1 - e^{-E}}\right) \leq x\right) = \mathbb{P}\left(e^{-E} \leq F(x)\right) = 0 = F(x).$$

$$\text{Insgesamt ist also die Verteilungsfunktion von } U\left(\frac{1}{1 - e^{-E}}\right) \text{ durch } F \text{ gegeben.} \tag{2.5}$$

Für eine bessere Anschauung betrachten wir nun die zugehörigen Ordnungsstatistiken für $0 \leq i \leq k - 1$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(U\left(\frac{1}{1 - e^{-E_{i+1:n}}}\right) \leq x\right) \qquad (= 0, \text{ für } F(x) \leq 0) \\
&= 1 - \mathbb{P}(E_{i+1:n} \leq -\log F(x)) \qquad (\text{für } F(x) > 0) \\
&= 1 - \sum_{m=i+1}^{n} \binom{n}{m} (H(-\log F(x)))^m (1 - H(-\log F(x)))^{n-m},
\end{aligned}$$

mit $H(x) = 1 - e^{-x}$ für $x > 0$. Eine Anwendung von Satz 1.2 erlaubt es, die rechte Seite dieser Gleichung auszuschreiben:

$$1 - \sum_{m=i+1}^{n} \binom{n}{m} (1 - F(x))^m F(x)^{n-m}$$

Dies lässt sich mit dem binomischen Lehrsatz, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = (x+y)^n$, weiter umformen:

$$\sum_{m=0}^{i} \binom{n}{m} (1 - F(x))^m F(x)^{n-m}$$

Durch Substitution und Indexverschiebung mit $m = n - \ell$ erhalten wir

$$\sum_{\ell=n-i}^{n} \binom{n}{n-\ell} (1 - F(x))^{n-\ell} F(x)^{\ell} = \mathbb{P}(X_{n-i:n} \leq x)$$

wobei letzteres aus Satz 1.2 und $\binom{n}{\ell} = \binom{n}{n-\ell}$ wegen der Symmetrie des Binomialkoeffizienten folgt. Damit haben wir gezeigt, dass $X_{n-i:n}$ für $i = 0, \dots, n-1$ verteilt ist wie $U\left(\frac{1}{1-e^{-E_{i+1:n}}}\right)$.

Wegen (2.5) lässt sich Satz 1.4 anwenden. Es folgt, dass die gemeinsamen Verteilungen der Ordnungsstatistiken gleich sind:

$$(X_{1:n}, \dots, X_{n:n}) \stackrel{d}{=} \left(U\left(\frac{1}{1 - e^{-E_{n:n}}}\right), \dots, U\left(\frac{1}{1 - e^{-E_{1:n}}}\right) \right).$$

Daraus folgt insbesondere

$$(X_{n:n}, X_{n-1:n}, \dots, X_{n-k+1:n}) \stackrel{d}{=} \left(U\left(\frac{1}{1 - e^{-E_{1:n}}}\right), U\left(\frac{1}{1 - e^{-E_{2:n}}}\right), \dots, U\left(\frac{1}{1 - e^{-E_{k:n}}}\right) \right).$$

Nun folgt aus Satz 1.8

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U\left(\frac{1}{1-e^{-x/n}}\right) - b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{U\left(\frac{n}{n(1-e^{-x/n})}\right) - U(n)}{a_n}.$$

Nach Satz 1.8 gilt außerdem

$$f_n(x) := \frac{U(nx) - U(n)}{a(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{x^{\gamma} - 1}{\gamma} =: f(x),$$

punktweise in x.

f_n ist monoton steigend und f ist stetig. Nach Lemma 2.5 folgt damit, dass f_n lokal gleichmäßig gegen f konvergiert. Wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U\left(\frac{n}{n(1-e^{-x/n})}\right) - U(n)}{a_n} = \frac{\left(\lim_{n\to\infty} n(1 - e^{-\frac{x}{n}})\right)^{-\gamma} - 1}{\gamma} = \frac{x^{-\gamma} - 1}{\gamma}, \tag{2.6}$$

da wegen $\lim_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \log a$ für $a > 0$ gilt:

$$-\lim_{n\to\infty} n(e^{-\frac{x}{n}} - 1) = -\log e^{-x} = x.$$

Zusammenfassend erhalten wir schließlich:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{X_{n:n} - b_n}{a_n}, \frac{X_{n-1:n} - b_n}{a_n}, \dots, \frac{X_{n-k:n} - b_n}{a_n}\right) \\
\stackrel{d}{=}&\left(\frac{U\left(\frac{1}{1-e^{(n\cdot E_{1:n})/n}}\right) - b_n}{a_n}, \dots, \frac{U\left(\frac{1}{1-e^{(n\cdot E_{k+1:n})/n}}\right) - b_n}{a_n}\right) \\
\xrightarrow{d}&\left(\frac{(E_1^*)^{-\gamma} - 1}{\gamma}, \dots, \frac{(E_1^* + E_2^* + \dots + E_{k+1}^*)^{-\gamma} - 1}{\gamma}\right),
\end{aligned}$$

wobei letzteres wegen (2.6) und

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{(nE_{1:n})^{-\gamma} - 1}{\gamma}, \dots, \frac{(nE_{k+1:n})^{-\gamma} - 1}{\gamma}\right) \\
\xrightarrow{d}&\left(\frac{(E_1^*)^{-\gamma} - 1}{\gamma}, \dots, \frac{(E_1^* + E_2^* + \dots + E_{k+1}^*)^{-\gamma} - 1}{\gamma}\right)
\end{aligned}$$

aus der Bemerkung 2.4 mit dem extended continuous mapping theorem (vgl. [vdVa], Theorem 18.11) folgt. □

Bemerkung 2.7. *Da wir in Satz 2.6 die Folgen $b_n = U(n)$ und $a_n = a(n)$ nach Satz 1.8 gewählt haben, gilt der Beweis nur für Extremwertverteilungen $G_\gamma(x)$, jedoch nicht für $G_\gamma(ax + b)$ mit reellen a, b mit $a > 0$. Um Satz 2.5 auch in dem allgemeineren Fall anwenden zu können, lässt sich folgende Aussage beweisen:*

Lemma 2.8. *Für reelle Folgen $a_n > 0$, b_n und reelle Konstanten $a > 0$, b gelte*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_{n:n} - b_n}{a_n} \leq x\right) = G_\gamma(ax + b).$$

Dann existieren reelle Folgen $a_n' > 0$, b_n', sodass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_{n:n} - b_n'}{a_n'} \leq x\right) = G_\gamma(x).$$

Beweis. Laut Vorraussetzung gilt $F^n(a_n x + b_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} G_\gamma(ax+b)$. Betrachtet man nun die lineare Transformation $\frac{a(X_{n:n}-b_n)}{a_n} + b$, so erhält man für deren Verteilungsfunktion:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{a(X_{n:n}-b_n)}{a_n} + b \leq x\right) &= \mathbb{P}\left(X_{n:n} \leq \frac{a_n(x-b)}{a} + b_n\right) \\ &= F^n\left(a_n \frac{x-b}{a} + b_n\right) \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} G_\gamma\left(a\ \frac{x-b}{a} + b\right) = G_\gamma(x).\end{aligned}$$

Somit gilt für

$$a_n' = \frac{a_n}{a},\ b_n' = b_n - b\frac{a_n}{a}$$

das Gewünschte. □

3 Zwischenordnungsstatistiken

Wie in den vorangegangenen Kapiteln seien $X_1, \dots, X_n$ *iid* Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Nachdem wir im vorigen Kapitel extreme Ordnungsstatistiken, das heißt Ordnungsstatistiken $X_{n-k+1:n}$ für $k \in \mathbb{N}$ fest, $n \longrightarrow \infty$ betrachtet haben, wollen wir uns im Folgenden mit Zwischenordnungsstatistiken beschäftigen, das heißt $X_{n-k:n}$ für $n \to \infty$ mit $k = k(n) \longrightarrow \infty$, $\frac{k}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Hierzu wollen wir, ähnlich wie bei den extremen Ordnungsstatistiken, beweisen, dass passend normalisierte Zwischenordnungsstatistiken asymptotisch die selbe Verteilung annehmen - eine Normalverteilung, wie wir zeigen werden.
Wir betrachten zunächst den Spezialfall mit standard-gleichverteilten Zufallsvariablen.

Lemma 3.1 (Smirnow, 1949). *Es seien $U_{1:n} \leq \dots \leq U_{n:n}$ die Ordnungsstatistiken für $U_i \sim U[0,1]$, $i = 1, \dots, n$. Dann gilt für $n \longrightarrow \infty$, $k = k(n) \longrightarrow \infty$, $n - k \longrightarrow \infty$:*

$$\frac{U_{k:n} - b_n}{a_n} \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\longrightarrow}} N(0,1),$$

mit

$$b_n := \frac{k-1}{n-1}, \quad a_n := \sqrt{b_n(1-b_n)\frac{1}{n-1}}.$$

Bemerkung 3.2. *Die Konvergenzbedingung $n-k \longrightarrow \infty$ ist eine schwächere Bedingung als $\frac{k}{n} \longrightarrow 0$. Dies sieht man schnell, da $n - k = n\left(1 - \frac{k}{n}\right) \to \infty$ direkt aus $\frac{k}{n} \to 0$ folgt. Für den umgekehrten Fall lässt sich beispielsweise durch $k(n) = \frac{n}{2}$ schnell ein Gegenbeispiel finden, da gilt:*

$$n - k = n - \frac{n}{2} \longrightarrow \infty, \text{ aber } \frac{k}{n} = \frac{\frac{n}{2}}{n} \longrightarrow \frac{1}{2} \neq 0$$

Beweis. Wir bestimmen zunächst die Dichte von $\frac{U_{k:n}-b_n}{a_n}$.
Zunächst ist, nach Satz 1.2, die Dichte von $U_{k:n}$ gegeben durch

$$f(x) = \binom{n}{k} k x^{k-1}(1-x)^{n-k} \mathbb{1}_{[0,1]}(x).$$

Die Dichte $\tilde{f}$ von $\frac{U_{k:n}-b_n}{a_n} = \frac{1}{a_n}U_{k:n} - \frac{b_n}{a_n}$ folgt mit linearer Transformation:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x) &= \frac{1}{\frac{1}{a_n}} f\left(\frac{x - \left(-\frac{b_n}{a_n}\right)}{\frac{1}{a_n}}\right) = a_n f(a_n x + b_n) \\
&= a_n \binom{n}{k} k (a_n x + b_n)^{k-1}(1 - a_n x - b_n)^{n-k} \mathbb{1}_{[0,1]}(a_n x + b_n) \\
&= \binom{n}{k} k a_n b_n^{k-1}(1-b_n)^{n-k}\left(1 + x\frac{a_n}{b_n}\right)^{k-1}\left(\frac{1 - a_n x - b_n}{1 - b_n}\right)^{n-k} \mathbb{1}_{[-b_n, 1-b_n]}(a_n x) \\
&= \binom{n}{k} k a_n b_n^{k-1}(1-b_n)^{n-k}\left(1 + x\frac{a_n}{b_n}\right)^{k-1}\left(1 - x\frac{a_n}{1-b_n}\right)^{n-k} \mathbb{1}_{[-\frac{b_n}{a_n}, \frac{1-b_n}{a_n}]}(x) \\
&= A_{n_1} \cdot A_{n_2} \cdot A_{n_3},
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
A_{n_1} &= \binom{n}{k} k a_n b_n^{k-1} (1-b_n)^{n-k}, \\
A_{n_2} &= \left(1 + x\frac{a_n}{b_n}\right)^{k-1} \left(1 - x\frac{a_n}{1-b_n}\right)^{n-k}, \\
A_{n_3} &= \mathbb{1}_{[-\frac{b_n}{a_n}, \frac{1-b_n}{a_n}]}(x).
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun, wie sich die einzelnen Terme asymptotisch verhalten. Für A_{n_1} gilt mit der Stirling-Formel $\left(n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \text{ für } n \to \infty\right)$ und $1 - b_n = \frac{n-k}{n-1}$:

$$\begin{aligned}
A_{n_1} &\sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (2\pi k)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{k}{e}\right)^{-k} (2\pi(n-k))^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{n-k}{e}\right)^{-n+k} k \cdot \\
&\quad \cdot \left(\frac{k-1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n-k}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}} (n-1)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{k-1}{n-1}\right)^{k-1} \left(\frac{n-k}{n-1}\right)^{n-k} \\
&\sim \sqrt{2\pi} n^{n+0,5-0,5-0,5-0,5+1} (n-1)^{-k-n+k} k^{-k-0,5+0,5-1+1} \cdot \\
&\quad \cdot (k-1)^k (n-k)^{-0,5-n+k+0,5+n-k} \\
&= \sqrt{2\pi} \frac{n^n}{(n-1)^n} \frac{(k-1)^k}{k^k} \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2\pi} \cdot e \cdot \frac{1}{e} = \sqrt{2\pi}.
\end{aligned}$$

Für den Term A_{n_2} gilt für $x \in \left(-\frac{b_n}{a_n}, \frac{1-b_n}{a_n}\right)$:

$$\left(1 + x\frac{a_n}{b_n}\right)^{k-1} \left(1 - x\frac{a_n}{1-b_n}\right)^{n-k} > 0,$$

was man schnell für k, n hinreichend groß sehen kann.
Logarithmieren des Ausdrucks liefert dann:

$$\log(A_{n_2}) = (k-1)\log\left(1 + x\frac{a_n}{b_n}\right) + (n-k)\log\left(1 - x\frac{a_n}{1-b_n}\right).$$

Mit der Taylorentwicklung $\log(x+1) = -\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^{k+1}}{k+1}$ erhalten wir:

$$(k-1)\left(x\frac{a_n}{b_n} - \frac{x^2}{2}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2 \pm \dots\right) + (n-k)\left(-x\frac{a_n}{1-b_n} - \frac{x^2}{2}\left(\frac{a_n}{1-b_n}\right)^2 - \dots\right). \tag{3.1}$$

Wir betrachten nun die Koeffizienten von $\frac{x^\ell}{\ell}$ für $\ell \in \mathbb{N}$.
Für $\ell = 1$ ergibt sich:

$$(k-1)x\frac{a_n}{b_n} - (n-k)x\frac{a_n}{1-b_n} = xa_n\left(\frac{(k-1)(1-b_n)-(n-k)b_n}{b_n(1-b_n)}\right) = 0,$$

da

$$1 - b_n = \frac{n-k}{n-1}, \quad b_n = \frac{k-1}{n-1}.$$

Mit ähnlicher Rechnung folgt für den Koeffizienten bezüglich $\ell = 2$

$$-\frac{x^2}{2}\left((k-1)\Big(\frac{a_n}{b_n}\Big)^2 + (n-k)\Big(\frac{a_n}{1-b_n}\Big)^2\right) = -\frac{x^2}{2},$$

da

$$\begin{aligned}
&(k-1)\frac{1-b_n}{b_n}(n-1)^{-1} + (n-k)\frac{b_n}{1-b_n}(n-1)^{-1}\\
&= (k-1)\frac{n-k}{n-1}\frac{n-1}{k-1}(n-1)^{-1} + (n-k)\frac{n-1}{n-k}\frac{k-1}{n-1}(n-1)^{-1}\\
&= \frac{n-k}{n-1} + \frac{k-1}{n-1}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Schließlich betrachten wir den Fall $\ell \geq 3$. Es bezeichne $c_{n,\ell,k}$ den Koeffizienten von $\frac{x^\ell}{l}$ in (3.1). Wir wollen zeigen, dass der Rest der der Summe gegen null geht:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\ell=3}^{\infty}\frac{x^\ell}{\ell}c_{n,\ell,k} \;=\; 0.$$

Hierfür teilen wir die Summe in 2 Teile und wenden auf sie das Majorantenkriterium an:

$$B_n := \sum_{\ell=3}^{\infty}\frac{x^\ell}{\ell}c_{n,\ell,k} = \sum_{\ell=3}^{\infty}\frac{x^\ell}{\ell}\left((-1)^{\ell+1}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^\ell(k-1)\right) + \sum_{\ell=3}^{\infty}\frac{x^\ell}{\ell}\left(\left(\frac{a_n}{1-b_n}\right)^\ell(n-k)\right).$$

Für die erste Summe gilt:

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{\ell=3}^{\infty}\frac{x^\ell}{\ell}(-1)^{\ell+1}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^\ell(k-1)\right|\\
\leq&\sum_{\ell=3}^{\infty}\frac{|x|^\ell}{\ell}\left(\frac{k-1}{n-1}\right)^{\frac{\ell}{2}}\left(\frac{n-k}{n-1}\right)^{\frac{\ell}{2}}(n-1)^{-\frac{\ell}{2}}\left(\frac{k-1}{n-1}\right)^{-\ell}(k-1)\\
=&\sum_{\ell=3}^{\infty}\frac{|x|^\ell}{\ell}\frac{(n-k)^{\ell/2}}{(n-1)^{\ell/2}(k-1)^{\ell/2-1}} \leq \sum_{\ell=3}^{\infty}\frac{|x|^\ell}{\ell(k-1)^{\ell/2-1}}\\
\leq&\frac{|x|^2}{3}\sum_{\ell=3}^{\infty}\frac{|x|^{\ell-2}}{(\sqrt{k-1})^{\ell-2}} = \frac{|x|^2}{3}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{|x|^\ell}{(\sqrt{k-1})^\ell}.
\end{aligned}$$

Die rechte Seite der Ungleichung entspricht einer geometrischen Reihe. Somit gilt für hinreichend großes k:

$$\begin{aligned}\frac{|x|^2}{3}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{|x|^\ell}{(\sqrt{k-1})^\ell} &= \frac{|x|^2}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{|x|}{\sqrt{k-1}}}-1\right)\\ &= \frac{|x|^2}{3}\left(\frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k-1}-|x|}-\frac{\sqrt{k-1}-|x|}{\sqrt{k-1}-|x|}\right)\\ &= \frac{|x|^3}{3(\sqrt{k-1}-|x|)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.\end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung liefert für die zweite Summe:

$$\left|\sum_{\ell=3}^{\infty}\frac{x^\ell}{\ell}\left(\frac{a_n}{1-b_n}\right)^\ell(n-k)\right| \leq \sum_{\ell=3}^{\infty}\frac{|x|^\ell}{\ell}\frac{(k-1)^{\ell/2}}{(n-k)^{\ell/2-1}(n-1)^{\ell/2}}.$$

Aus der Konvergenzbedingung lässt sich nun folgern, dass

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{k}{n}\in[0,1],\text{ da }\underbrace{n-k}_{\to\infty}=n\Big(1-\frac{k}{n}\Big)\to\infty.$$

Es folgt für hinreichend großes n:

$$\begin{aligned}&\sum_{\ell=3}^{\infty}\frac{|x|^\ell}{\ell}\frac{(k-1)^{\ell/2}}{(n-k)^{\ell/2-1}(n-1)^{\ell/2}} \leq \sum_{\ell=3}^{\infty}\frac{|x|^\ell}{\ell(\sqrt{n-k})^{\ell-2}} \leq \frac{|x|^2}{3}\sum_{\ell=1}^{\infty}\left(\frac{|x|}{\sqrt{n-k}}\right)^\ell\\ &=\frac{|x|^2}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{|x|}{\sqrt{n-k}}}-1\right)=\frac{|x|^3}{3(\sqrt{n-k}-|x|)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.\end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir also mit dem Majorantenkriterium $B_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, sodass der zweite Term A_{n_2} gegen $-\frac{x^2}{2}$ konvergiert.

Zuletzt ist zu zeigen, dass für die Schranken des Indikators im Term $A_{n_3}=\mathbb{1}_{[-\frac{b_n}{a_n},\frac{1-b_n}{a_n}]}(x)$ gilt: $-\frac{b_n}{a_n}\to-\infty$ und $\frac{1-b_n}{a_n}\to\infty$. Eine Betrachtung liefert

$$\begin{aligned}\left[-\frac{b_n}{a_n},\frac{1-b_n}{a_n}\right] &= \Big[-(k-1)^{\frac12}(n-1)^{-\frac12}(n-k)^{-\frac12}(n-1)^{\frac12}(n-1)^{\frac12},\\ &\qquad (n-k)^{\frac12}(n-1)^{-\frac12}(k-1)^{-\frac12}(n-1)^{\frac12}(n-1)^{\frac12}\Big]\\ &= \Big[-\underbrace{(k-1)^{\frac12}(n-k)^{-\frac12}}_{\to[0,\infty)}(n-1)^{\frac12},(n-k)^{\frac12}\underbrace{(k-1)^{-\frac12}(n-1)^{\frac12}}_{\to(1,\infty]}\Big],\end{aligned}$$

womit das Gewünschte gezeigt ist.
Somit konvergiert die Indikatorfunktion punktweise gegen die konstante Funktion 1.
Zusammenfassend haben wir gezeigt:

$$\tilde{f}(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},$$

was der Dichtefunktion der Standardnormalverteilung entspricht. Nach Scheffé's Lemma (vergleiche: [Wi], Abschnitt 5.10) impliziert fast sicher punktweise Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsdichten die Konvergenz in Verteilung, weswegen schließlich gilt:

$$\frac{U_{k:n} - b_n}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1).$$

□

Wir wollen nun mit Hilfe dieses Lemmas ein allgemeineres Resultat für *iid* Zufallsvariablen beweisen, wobei wir lediglich annehmen, dass ihre Verteilungsfunktion F die von Mises Bedingung aus Satz 1.9 erfüllt.

Satz 3.3. *Angenommen, F erfüllt die von Mises-Bedingung für den Anziehungsbereich einer Extremwertverteilung G_γ mit $\gamma \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $k = k(n) \longrightarrow \infty$, $n \longrightarrow \infty, \frac{k}{n} \longrightarrow 0$:*

$$\sqrt{k}\,\frac{X_{n-k:n} - U(\frac{n}{k})}{\frac{n}{k}U'(\frac{n}{k})} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Beweis. Es seien wieder $U_1, \ldots, U_n \overset{iid}{\sim} U[0,1]$ und

$$b_n := \frac{k-1}{n-1}, \quad a_n := \sqrt{b_n(1-b_n)\frac{1}{n-1}},$$

wie in Lemma 3.1. Im Folgenden wenden wir das Slutsky-Theorem mehrere Male an. Das Theorem besagt, dass für Folgen von Zufallsvariablen A_n, B_n, X_n mit $A_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a \in \mathbb{R},\ B_n \xrightarrow{\mathbb{P}} b \in \mathbb{R},\ X_n \xrightarrow{d} X$ für $n \to \infty$ gilt: $A_n + B_n X_n \xrightarrow{d} a + bX$.
Kurze Rechnungen liefern:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n-k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \underbrace{\frac{k}{n}}_{\to 0}} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{k-1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{k}\underbrace{\sqrt{\frac{k-1}{k}}}_{\to 1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{k}.$$

Wir wenden diese, sowie einige analog verlaufende Rechnungen, nun an um mehrere Umformungen durchzuführen.

$$\begin{aligned}\frac{U_{k:n} - b_n}{a_n} &= \frac{U_{k:n} - \frac{k-1}{n-1}}{\sqrt{\frac{k-1}{n-1}\frac{n-k}{n-1}(n-1)^{-1}}} = \frac{k-1}{n-1}\left(\frac{\frac{n-1}{k-1}U_{k:n} - 1}{\sqrt{\frac{k-1}{n-1}\frac{n-k}{(n-1)^2}}}\right)\\ &= \sqrt{\frac{n-1}{n-k}}\sqrt{k-1}\left(\frac{n-1}{k-1}U_{k:n} - 1\right)\end{aligned}$$

Somit gilt nach dem Lemma von Slutsky: $\frac{U_{k:n}-b_n}{a_n} \xrightarrow{d} \sqrt{k}\left(\frac{n}{k}U_{k+1:n}-1\right)$. Die Umformung von $U_{k:n}$ zu $U_{k+1:n}$ erfolgt dabei über Substitution von k durch $k+1$. Lemma 3.1 ist anwendbar, da die Voraussetzungen des Lemmas schwächer sind, als die von Satz 3.2. Wir erhalten damit:

$$\frac{U_{k:n}-b_n}{a_n} \xrightarrow{d} N(0,1),$$

also insbesondere

$$\sqrt{k}\left(\frac{n}{k}U_{k+1:n}-1\right) \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Durch Anwendung der δ-Methode aus Satz 1.8 mit $g(\theta)=\frac{1}{\theta}$, $(g'(\theta))^2=\frac{1}{\theta^4}$, ergibt sich

$$\sqrt{k}\left(\frac{k}{nU_{k+1:n}}-1\right) \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Wir wollen nun diese Ergebnisse des Lemmas mit dem Satz verknüpfen, indem wir zunächst zeigen, dass $X_{n-k:n}$ verteilt ist wie $F^{\leftarrow}(1-U_{k+1:n})$. Nach Satz 1.2 gilt nämlich

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F^{\leftarrow}(1-U_{k+1:n}) \leq x) &= \mathbb{P}(1-U_{k+1:n} \leq F(x)) \\
&= \mathbb{P}(U_{k+1:n} \geq 1-F(x)) \\
&= 1-\sum_{j=k+1}^{n}\binom{n}{j}(1-F(x))^j F(x)^{n-j}, \text{ was aus Satz 1.2 folgt} \\
&= \sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}(1-F(x))^j F(x)^{n-j},
\end{aligned}$$

was aus dem binomischen Lehrsatz folgt.
Setzen wir nun $j=n-\ell$ und substituieren j mit $n-\ell$, so bekommen wir:

$$\sum_{\ell=n-k}^{n}\binom{n}{n-\ell}(1-F(x))^{n-\ell}F(x)^{\ell} = \mathbb{P}(X_{n-k:n} \leq x),$$

was aus der Symmetrie des Binomialkoeffizienten und Satz 1.2 folgt.
Zusammenfassend erhalten wir somit:

$$X_{n-k:n} \stackrel{d}{=} F^{\leftarrow}(1-U_{k+1:n}).$$

Außerdem gilt

$$F^{\leftarrow}(1-U_{k+1:n}) \stackrel{d}{=} U\left(\frac{1}{U_{k+1:n}}\right),$$

denn

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F^{\leftarrow}(1-U_{k+1:n}) \leq x) &= \mathbb{P}(1-F(x) \leq U_{k+1:n}) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{U_{k+1:n}} \leq \frac{1}{1-F(x)}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left(\frac{1}{1-F}\right)^{\leftarrow}\left(\frac{1}{U_{k+1:n}}\right) \leq x\right) = \mathbb{P}\left(U\left(\frac{1}{U_{k+1:n}}\right) \leq x\right).
\end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$X_{n-k:n} \stackrel{d}{=} F^{\leftarrow}(1 - U_{k+1:n}) \stackrel{d}{=} U\left(\frac{1}{U_{k+1:n}}\right).$$

Wir wollen nun die Ergebnisse zusammentragen:

$$\begin{aligned}
\sqrt{k}\,\frac{X_{n-k:n} - U\left(\frac{n}{k}\right)}{\frac{n}{k}U'\left(\frac{n}{k}\right)} &\stackrel{d}{=} \sqrt{k}\,\frac{U\left(\frac{1}{U_{k+1:n}}\right) - U\left(\frac{n}{k}\right)}{\frac{n}{k}U'\left(\frac{n}{k}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{k}}{U'\left(\frac{n}{k}\right)} \cdot \left(\left(U\left(\frac{n}{k}\frac{k}{nU_{k+1:n}}\right) - U\left(\frac{n}{k}\right)\right)\frac{1}{\frac{n}{k}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{k}}{U'\left(\frac{n}{k}\right)} \cdot \left[U\left(\frac{n}{k}\,s\right)\frac{1}{\frac{n}{k}}\right]_1^{\frac{k}{nU_{k+1:n}}} \\
&= \sqrt{k}\int_1^{\frac{k}{nU_{k+1:n}}} \frac{U'\left(\frac{n}{k}s\right)}{U'\left(\frac{n}{k}\right)}ds.
\end{aligned}$$

Die von Mises Bedingung impliziert nach Korollar 1.10:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U'(nx)}{U'(n)} = x^{\gamma-1} \text{ in } (0,\infty), \text{ also } U' \in RV_{\gamma-1}.$$

Damit lassen sich die Potter-Ungleichungen aus Satz 1.11 anwenden: Es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für beliebige $\epsilon, \epsilon' > 0$, $n \geq n_0$, $s \geq 1$ gilt:

$$(1-\epsilon)s^{\gamma-1-\epsilon'} < \frac{U'\left(\frac{n}{k}s\right)}{U'\left(\frac{n}{k}\right)} < (1+\epsilon)s^{\gamma-1+\epsilon'}.$$

Multiplizieren mit $\sqrt{k}$, Integrieren bezüglich $\int_1^{\frac{k}{nU_{k+1:n}}} ds$ und Setzen von $s = \frac{k}{n}\frac{1}{U_{k+1:n}}$ liefert schließlich:

$$(1-\epsilon)\sqrt{k}\frac{\left(\frac{k}{nU_{k+1:n}}\right)^{\gamma-\epsilon'} - 1}{\gamma - \epsilon'} \leq \sqrt{k}\frac{U\left(\frac{1}{U_{k+1:n}}\right) - U\left(\frac{n}{k}\right)}{\frac{n}{k}U'\left(\frac{n}{k}\right)} \leq (1+\epsilon)\sqrt{k}\frac{\left(\frac{k}{nU_{k+1:n}}\right)^{\gamma+\epsilon'} - 1}{\gamma + \epsilon'}$$

Durch nochmaliges anwenden der δ-Methode auf $\sqrt{k}\left(\frac{k}{nU_{k+1:n}} - 1\right) \longrightarrow N(0,1)$, mit

$$g(\theta) = \frac{\theta^{\gamma\pm\epsilon'}}{\gamma\pm\epsilon'},\ g'(\theta) = \theta^{\gamma\pm\epsilon'-1},$$

bekommen wir für die Schranken:

$$\begin{aligned}
\sqrt{k}\frac{\left(\frac{k}{nU_{k+1:n}}\right)^{\gamma\pm\epsilon'} - 1}{\gamma\pm\epsilon'} &= \sqrt{k}\left(\frac{\left(\frac{k}{nU_{k+1:n}}\right)^{\gamma\pm\epsilon'}}{\gamma\pm\epsilon'} - \frac{1}{\gamma\pm\epsilon'}\right) = \sqrt{n}\left(g\left(\frac{k}{nU_{k+1:n}}\right) - g(1)\right) \\
&\stackrel{d}{\longrightarrow} N(0,1).
\end{aligned}$$

Wir schreiben die Schranken nun als

$$(1-\epsilon)A_n \le C_n \le (1+\epsilon)B_n,$$

wobei:

$$A_n := \sqrt{k}\frac{\left(\frac{k}{nU_{k+1:n}}\right)^{\gamma-\epsilon'}-1}{\gamma-\epsilon'},$$

$$B_n := \sqrt{k}\frac{\left(\frac{k}{nU_{k+1:n}}\right)^{\gamma+\epsilon'}-1}{\gamma+\epsilon'},$$

$$C_n := \sqrt{k}\frac{U\left(\frac{1}{U_{k+1:n}}\right)-U\left(\frac{n}{k}\right)}{\frac{n}{k}U'\left(\frac{n}{k}\right)}.$$

Daraus erhalten wir für die Verteilung von C_n:

$$\mathbb{P}(C_n \le x) \le \mathbb{P}((1-\epsilon)A_n \le x).$$

Wir wissen, dass gilt: $A_n, B_n \xrightarrow{d} N(0,1)$. Es folgt für ein $N \sim N(0,1)$:

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(C_n \le x) \le \mathbb{P}((1-\epsilon)N \le x).$$

Ein analoges Ergebnis erhalten wir für die zweite Schranke mit B_n:

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(C_n \le x) \ge \mathbb{P}((1+\epsilon)N \le x).$$

Da ϵ beliebig klein gewählt werden kann, folgt schließlich

$$\mathbb{P}(C_n \le x) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathbb{P}(N \le x),$$

was ausgeschrieben

$$\sqrt{k}\frac{U\left(\frac{1}{U_{k+1:n}}\right)-U\left(\frac{n}{k}\right)}{\frac{n}{k}U'\left(\frac{n}{k}\right)} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

ergibt. Schließlich liefert

$$X_{n-k:n} \stackrel{d}{=} U\left(\frac{1}{U_{k+1:n}}\right)$$

das Gewünschte. □

4 Konsistenz des Pickands-Schätzers

Im Folgenden Kapitel wollen wir als Anwendung von Zwischenordnungsstatistiken in der Extremwerttheorie den Pickands-Schätzer (vgl. [Pic], 1975) untersuchen. Dieser stellt einen relativ einfachen Schätzer für einen beliebigen Extremwertindex $\gamma \in \mathbb{R}$ dar, weswegen er vor allem gut geeignet ist, wenn noch keine Informationen über γ vorhanden sind. Als Grundanforderung für einen Schätzer werden wir dabei die (schwache) Konsistenz des Schätzers, das heißt

$$\hat{\gamma}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \gamma$$

für $\gamma \in \mathbb{R}$ beweisen. Dazu definieren wir zunächst den Schätzer.

Definition 4.1. *Es seien $X_1, \dots, X_n$ iid Zufallsvariablen. Dann ist der Pickands-Schätzer durch*

$$\hat{\gamma}_n := \frac{1}{\log 2} \log \left(\frac{X_{n-k:n} - X_{n-2k:n}}{X_{n-2k:n} - X_{n-4k:n}} \right)$$

gegeben.

Bemerkung 4.2. *Da bei dem Schätzer, wie bereits erwähnt, die Zwischenordnungsstatistiken zum Einsatz kommen, wird dieser Schätzer für $n \longrightarrow \infty, k = k(n) \longrightarrow \infty$, $\frac{k}{n} \longrightarrow 0$ betrachtet.*

Für den Beweis der Konsistenz benötigen wir ein Lemma.

Lemma 4.3. *Es seien $Y_1, \dots, Y_n$ iid Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 1, \\ 1 - \frac{1}{x}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt für $n \longrightarrow \infty, k = k(n) \longrightarrow \infty, \frac{k}{n} \longrightarrow 0$:

$$\sqrt{2k} \left(\frac{1}{2} \frac{Y_{n-k:n}}{Y_{n-2k:n}} - 1 \right) \xrightarrow{d} N(0,1),$$

sowie

$$2\sqrt{k} \left(\frac{1}{2} \frac{Y_{n-2k:n}}{Y_{n-4k:n}} - 1 \right) \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Beweis. Betrachtung von e^E mit $E \sim exp(1)$ liefert zunächst

$$\mathbb{P}\left(e^E \leq x\right) = \mathbb{P}(E \leq \log x) = 1 - e^{-\log x} = 1 - \frac{1}{x},$$

also $Y_1 \sim e^E$. Damit erhalten wir durch Anwendung von Satz 1.4 und Lemma 2.3:

$$(Y_{1:n}, \dots, Y_{n:n}) \stackrel{d}{=} \left(e^{E_{1:n}}, \dots, e^{E_{n:n}}\right) \stackrel{d}{=} \left(\exp\left(\frac{E_1^*}{n}\right), \dots, \exp\left(\frac{E_1^*}{n} + \dots + \frac{E_n^*}{1}\right)\right). \quad (4.1)$$

Deswegen gilt

$$\begin{aligned}\frac{Y_{n-k:n}}{Y_{n-2k:n}} &\stackrel{d}{=} \exp\left(\frac{E_1^*}{n} + \ \dots \ + \frac{E_{n-k}^*}{k+1} - \frac{E_1^*}{n} - \ \dots \ - \frac{E_{n-2k}^*}{k+1}\right) \\ &= \exp\left(\frac{E_{n-2k+1}^*}{2k} + \ \dots \ + \frac{E_{n-k}^*}{k+1}\right) \\ &\stackrel{d}{=} \exp\left(\frac{E_1^*}{2k} + \ \dots \ + \frac{E_k^*}{k+1}\right).\end{aligned}$$

Durch nochmaliges Anwenden von (4.1), mit $n = 2k$, bekommen wir als Resultat, dass die rechte Seite voriger Gleichung verteilt ist wie $Y_{k:2k}$. Das heißt:

$$\frac{Y_{n-k:n}}{Y_{n-2k:n}} \stackrel{d}{=} Y_{k:2k}.$$

Eine analoge Rechnung liefert

$$\frac{Y_{n-2k:n}}{Y_{n-4k:n}} \stackrel{d}{=} Y_{2k:4k}.$$

Wir erhalten damit

$$\begin{aligned}\sqrt{2k}\left(\frac{1}{2}\frac{Y_{n-k:n}}{Y_{n-2k:n}} - 1\right) &\stackrel{d}{=} \sqrt{2k}\left(\frac{1}{2}Y_{k:2k} - 1\right), \\ \text{sowie} \quad 2\sqrt{k}\left(\frac{1}{2}\frac{Y_{n-2k:n}}{Y_{n-4k:n}} - 1\right) &\stackrel{d}{=} 2\sqrt{k}\left(\frac{1}{2}Y_{2k:4k} - 1\right).\end{aligned}$$

Um später das Lemma von Smirnow 3.1 anwenden zu können, wollen wir zunächst zeigen, dass für die Ordnungsstatistik $U_{k+1:n}$ von standard-gleichverteilten Zufallsvariablen gilt:

$$Y_{k:2k} \stackrel{d}{=} U_{k+1:2k}^{-1}$$

Betrachten der Verteilungsfunktion liefert:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U_{k+1:2k}^{-1} \leq x) &= \mathbb{P}\left(U_{k+1:2k} \geq \frac{1}{x}\right) \\ &= 1 - \sum_{m=k+1}^{2k} \binom{2k}{m} \left(\frac{1}{x}\right)^m \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{2k-m} \\ &= \sum_{m=0}^{k} \binom{2k}{m} \left(\frac{1}{x}\right)^m \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{2k-m} && (4.2) \\ &= \sum_{\ell=2k-k}^{2k} \binom{2k}{2k-\ell} \left(\frac{1}{x}\right)^{2k-\ell} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\ell} && (4.3) \\ &= \mathbb{P}(Y_{k:2k} \leq x) && (4.4)\end{aligned}$$

(4.2) folgt hierbei aus dem binomischen Lehrsatz. (4.3) folgt für $m = 2k - \ell$ aus dem Substituieren von m mit $2k - \ell$ und (4.4) aus der Symmetrie des Binomialkoeffizienten. Es gilt also

$$\sqrt{2k}\left(\frac{1}{2}\frac{Y_{n-k:n}}{Y_{n-2k:n}} - 1\right) \stackrel{d}{=} \sqrt{2k}\left(\frac{1}{2}U_{k+1:2k}^{-1} - 1\right).$$

Smirnows Lemma, welches wegen $n - k = 2k - k \longrightarrow \infty$ anwendbar ist, besagt

$$\frac{U_{k:n} - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} N(0,1),$$

für $b_n = \frac{k-1}{2k-1} \sim \frac{1}{2} \sim 1 - b_n$ und $a_n = \sqrt{b_n(1-b_n)(n-1)^{-1}} \sim \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2k}}$ für $n \longrightarrow \infty$. Durch mehrfache Anwendung des Slutsky-Theorems erhalten wir damit

$$2\sqrt{2k}U_{k+1:2k} - \sqrt{2k} = \sqrt{2k}(2U_{k+1:2k} - 1) \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Schließlich liefert die δ-Methode mit $g(\theta) = \frac{1}{\theta}$ das Gewünschte für den ersten Ausdruck:

$$\sqrt{2k}\left(\frac{1}{2}\frac{Y_{n-k:n}}{Y_{n-2k:n}} - 1\right) \stackrel{d}{=} \sqrt{2k}\left(\frac{1}{2}U_{k+1:2k}^{-1} - 1\right) \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Eine komplett analoge Rechnung liefert nun für den zweiten Ausdruck

$$2\sqrt{k}\left(\frac{1}{2}\frac{Y_{n-2k:n}}{Y_{n-4k:n}} - 1\right) \stackrel{d}{=} 2\sqrt{k}\left(\frac{1}{2}Y_{2k:4k} - 1\right) \stackrel{d}{=} 2\sqrt{k}\left(\frac{1}{2}U_{2k+1:4k}^{-1} - 1\right) \xrightarrow{d} N(0,1),$$

womit das Lemma bewiesen ist. □

Satz 4.4. *Es seien $X_1, \ldots, X_n$ iid Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion $F \in MAB(G_\gamma)$ für ein $\gamma \in \mathbb{R}$. Dann gilt für den Pickands-Schätzer mit $n \longrightarrow \infty$, $k = k(n) \longrightarrow \infty, \frac{k}{n} \longrightarrow 0$:*

$$\hat{\gamma}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \gamma.$$

Beweis. Aus Satz 1.8 erhalten wir zunächst, da $F \in MAB(G_\gamma)$ und U monoton steigend ist:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(tx) - U(t)}{a(t)} = \frac{x^\gamma - 1}{\gamma}, \text{ für } x > 0,$$
$$\text{sowie } \lim_{t\to\infty} \frac{a(t)}{U(ty) - U(t)} = \frac{\gamma}{y^\gamma - 1}, \text{ für } y > 0.$$

Somit gilt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(tx) - U(t)}{U(ty) - U(t)} = \frac{x^\gamma - 1}{y^\gamma - 1}. \tag{4.5}$$

Wir wollen nun Lemma 4.3 mit dem Satz verknüpfen, indem wir zeigen, dass für iid wie in Lemma 4.3 verteilte Y_i, mit $i = 1, \ldots, n$, gilt:

$$(U(Y_{1:n}), \ldots, U(Y_{n:n})) \stackrel{d}{=} (X_{1:n}, \ldots, X_{n:n})$$

Dies erhalten wir, für X mit Verteilungsfunktion F und Y_1 wie in Lemma 4.3, aus Satz 1.4 und

$$\mathbb{P}\left(U(Y_1) \leq x\right) = \mathbb{P}\left(Y_1 \leq \frac{1}{1-F(x)}\right) = 1 - (1 - F(x)) = F(x).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\frac{X_{n-k:n} - X_{n-2k:n}}{X_{n-2k:n} - X_{n-4k:n}} &= \frac{X_{n-k:n} + (-X_{n-2k:n} + X_{n-4k:n}) - X_{n-4k:n}}{X_{n-2k:n} - X_{n-4k:n}} \\
&= \frac{X_{n-k:n} - X_{n-4k:n}}{X_{n-2k:n} - X_{n-4k:n}} - 1 \\
&\overset{d}{=} \frac{U(Y_{n-k:n}) - U(Y_{n-4k:n})}{U(Y_{n-2k:n}) - U(Y_{n-4k:n})} - 1 \\
&= \frac{U\left(\frac{Y_{n-k:n}}{Y_{n-4k:n}} Y_{n-4k:n}\right) - U(Y_{n-4k:n})}{U\left(\frac{Y_{n-2k:n}}{Y_{n-4k:n}} Y_{n-4k:n}\right) - U(Y_{n-4k:n})} - 1.
\end{aligned}$$

Außerdem gelten

- $Y_{n-4k:n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \infty$ für $n \to \infty$, wegen $n - 4k \to \infty$,
- $\dfrac{Y_{n-k:n}}{Y_{n-2k:n}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 2, \dfrac{Y_{n-2k:n}}{Y_{n-4k:n}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 2$ für $n \to \infty$, wegen Lemma 4.3,
- $\dfrac{Y_{n-k:n}}{Y_{n-4k:n}} = \dfrac{Y_{n-k:n}}{Y_{n-2k:n}} \dfrac{Y_{n-2k:n}}{Y_{n-4k:n}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 4.$

Zusammenfassend bekommen wir nun mit (4.5)

$$\frac{U\left(\frac{Y_{n-k:n}}{Y_{n-4k:n}} Y_{n-4k:n}\right) - U(Y_{n-4k:n})}{U\left(\frac{Y_{n-2k:n}}{Y_{n-4k:n}} Y_{n-4k:n}\right) - U(Y_{n-4k:n})} - 1 \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{4^\gamma - 1}{2^\gamma - 1} - 1 = \frac{4^\gamma - 2^\gamma}{2^\gamma - 1} = 2^\gamma,$$

also insbesondere

$$\hat{\gamma}_n = \frac{1}{\log 2} \log\left(\frac{X_{n-k:n} - X_{n-2k:n}}{X_{n-2k:n} - X_{n-4k:n}}\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{\log 2} \log 2^\gamma = \gamma,$$

womit die Konsistenz des Pickands-Schätzers gezeigt ist. $\square$

Literatur

[LfU] Bayerisches Landesamt für Umwelt (LfU): Wasserwirtschaftlicher Bericht zum Junihochwasser 2013

[deHaFe] L. De Haan und A. Ferreira: Extreme Value Theory - An Introduction; Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, Springer Verlag (2006)

[FiTi] R.A.Fisher und L.H.C. Tippet: Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample; Proc. Cambridge Philos. Soc. 24, S.180-190 (1928)

[Gne] B.V. Gnedenko: Sur la distribution limite du terme maximum d'une serie aleatoire; Ann. Math. 44, S.423-453 (1943)

[vdVa] A.W. van der Vaart: Asymptotic Statistics; Cambridge University Press (1998)

[Pot] H.S.A. Potter: The mean value of a Dirichlet series II; Proc. London Math. Soc. 47, S.1-19 (1942)

[ArBaNa] B.C. Arnold, N. Balakrishnan und H.N. Nagaraja: A First Course in Order Statistics; Wiley, New York (1992)

[Smi] N.V. Smirnow: Limit distributions for the terms of a variational series. Auf russisch: Trudy Matematicheskogo Instituta Steklova 25 (1949), Acad. Sci. USSR, Moscow–Leningrad; Übersetzung ins Englische: Transl. Amer. Math. Soc. 11, 82-143 (1952)

[Wi] D.Williams: Probability with Martingales; Cambridge University Press, S.55 (1991)

[Pic] J. Pickands III.: Statistical inference using extreme order statistics; The Annals of Statistics 3, S.119-131 (1975)

[Kab] Z. Kabluchko: Extremwerttheorie; Skript vom WS 2011/12, Universität Ulm - Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften

Online-Quellen:

· Universität Heidelberg Logo, URL: https://www.csi.uni-heidelberg.de/logo1

5 Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne unerlaubte fremde Hilfe verfasst habe und dass alle wörtlich oder sinngemäß aus Veröffentlichungen entnommenen Stellen dieser Arbeit unter Quellenangabe einzeln kenntlich gemacht sind.

Heidelberg, den 21.10.2014